Simplex Dual y Análisis Post-Optimal

MLG521

Profesor: Cristóbal Rojas

Departamento de Ciencias de de la Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad Andrés Bello
Curso dictado en conjunto con Pamela Álvarez

MLG521

Recapitulemos un poco...

Dado el siguiente problema **Primal**

$$\begin{array}{rrl} \text{Minimizar} & z & = c^t x \\ s.a. & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

el problema **Dual** asociado es

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximizar} & z & = b^t y \\ s.a. & A^t y & \leq c \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

Donde $y^{*t} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ son las **variables duales**

Primal VS Dual – Reglas de transformación

	Primal (Dual)	***Dual (Primal)***
Regla 1	Minimizar	Maximizar
Regla 2	Una variable ≥ 0	Una restricción de desigualdad ≤
Regla 3	Una variable ≤ 0	Una restricción de desigualdad ≥
Regla 4	Una variable no restringida en signo	Una restricción de igualdad
Regla 5	Una restricción de desigualdad ≤	Una variable ≤ 0
Regla 6	Una restricción de desigualdad ≥	Una variable ≥ 0
Regla 7	Una restricción de igualdad	Una variable no restringida en signo

Ejemplo (**quedó de tarea la clase pasada: ¿ alguien la hizo ?**)

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\
\text{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & = & 1 \\
 & y_1 & = & 1 \\
 & -y_2 & \leq & -1 \\
 & y_1 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dualidad: Reglas

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\
\textit{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & & = 1 \\
 & y_1 & & = 1 \\
 & & -y_2 & \leq -1 \\
 & & y_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

3 restricciones $\longrightarrow$ 3 variables duales x_1, x_2, x_3. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Minimizar $x_1 + x_2 - x_3$
- $y_1 \geq 0$: Regla 6 $\longrightarrow$ $2x_1 + x_2 \geq 3$
- y_2 irrestricta: Regla 7 $\longrightarrow$ $x_1 - x_3 = 2$
- Una restricción de desigualdad: Regla 2 $\longrightarrow$ $x_3 \geq 0$.

Dualidad: Reglas

$$\begin{array}{llll} \textit{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\ \textit{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & & = 1 \\ & y_1 & & = 1 \\ & & -y_2 & \leq -1 \\ & & y_1 \geq 0 & \end{array}$$

3 restricciones $\longrightarrow$ 3 variables duales x_1, x_2, x_3. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Minimizar $x_1 + x_2 - x_3$
- $y_1 \geq 0$: Regla 6 $\longrightarrow$ $2x_1 + x_2 \geq 3$
- y_2 irrestricta: Regla 7 $\longrightarrow$ $x_1 - x_3 = 2$
- Una restricción de desigualdad: Regla 2 $\longrightarrow$ $x_3 \geq 0$.

Dualidad: Reglas

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\
\textit{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & & = 1 \\
& y_1 & & = 1 \\
& & -y_2 & \leq -1 \\
& & y_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

3 restricciones $\longrightarrow$ 3 variables duales x_1, x_2, x_3. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Minimizar $x_1 + x_2 - x_3$
- $y_1 \geq 0$: Regla 6 $\longrightarrow$ $2x_1 + x_2 \geq 3$
- y_2 irrestricta: Regla 7 $\longrightarrow$ $x_1 \quad - x_3 = 2$
- Una restricción de desigualdad: Regla 2 $\longrightarrow$ $x_3 \geq 0.$

Dualidad: Reglas

$$\begin{array}{lll} \textit{Maximizar} \quad z & = & 3y_1 + 2y_2 \\ \textit{sujeto a} \quad 2y_1 + y_2 & & = 1 \\ \quad y_1 & & = 1 \\ \quad\quad -y_2 & & \leq -1 \\ & y_1 \geq 0 & \end{array}$$

3 restricciones $\longrightarrow$ 3 variables duales x_1, x_2, x_3. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Minimizar $x_1 + x_2 - x_3$
- $y_1 \geq 0$: Regla 6 $\longrightarrow$ $2x_1 + x_2 \geq 3$
- y_2 irrestricta: Regla 7 $\longrightarrow$ $x_1 \quad - x_3 = 2$
- Una restricción de desigualdad: Regla 2 $\longrightarrow$ $x_3 \geq 0$.

Dualidad: Reglas

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\
\textit{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & & = 1 \\
 & y_1 & & = 1 \\
 & & -y_2 & \leq -1 \\
 & & y_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

3 restricciones $\longrightarrow$ 3 variables duales x_1, x_2, x_3. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Minimizar $x_1 + x_2 - x_3$
- $y_1 \geq 0$: Regla 6 $\longrightarrow$ $2x_1 + x_2 \geq 3$
- y_2 irrestricta: Regla 7 $\longrightarrow$ $x_1 \quad - x_3 = 2$
- Una restricción de desigualdad: Regla 2 $\longrightarrow$ $x_3 \geq 0$.

Dualidad

Por lo tanto, el problema Dual es

$$
\begin{array}{rcccl}
\textit{Minimizar} & z & = & & x_1 + x_2 - x_3 \\
\textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 & & \geq 3 & \\
& x_1 & - x_3 & = 2 & \\
& & x_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden.*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA.*

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t\hat{y} = c^t\hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem (Dualidad fuerte)

Dado un programa lineal y su dual, una de las siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r_j} = min_i c_{r_i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{rj} = min_i c_{ri}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = mini\, c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{rj} = mini c_{ri}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Simplex Primal – Recuerdo :

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A$.
4. ¿Es óptimo? (¿ $c_r \geq 0$?)
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = mini c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Observación: la condición de optimalidad

$$c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$$

es equivalente a

$$c_B^t B^{-1} A \leq c^t.$$

Como $y^t = c_B^t B^{-1}$, esta condición es lo mismo que **factibilidad dual** :

$$A^t y \leq c.$$

Si además la solución básica $x_B = B^{-1} b$ es factible ($x_B \geq 0$), entonces es óptima! Es decir

$$x_B \geq 0$$

es la **condición de optimalidad dual** para y.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Observación: la condición de optimalidad

$$c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$$

es equivalente a

$$c_B^t B^{-1} A \leq c^t.$$

Como $y^t = c_B^t B^{-1}$, esta condición es lo mismo que **factibilidad dual** :

$$A^t y \leq c.$$

Si además la solución básica $x_B = B^{-1} b$ es factible ($x_B \geq 0$), entonces es óptima! Es decir

$$x_B \geq 0$$

es la **condición de optimalidad dual** para y.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Observación: la condición de optimalidad

$$c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$$

es equivalente a

$$c_B^t B^{-1} A \leq c^t.$$

Como $y^t = c_B^t B^{-1}$, esta condición es lo mismo que **factibilidad dual** :

$$A^t y \leq c.$$

Si además la solución básica $x_B = B^{-1} b$ es factible ($x_B \geq 0$), entonces es óptima! Es decir

$$x_B \geq 0$$

es la **condición de optimalidad dual** para y.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Observación: la condición de optimalidad

$$c_r = c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$$

es equivalente a

$$c_B^t B^{-1} A \leq c^t.$$

Como $y^t = c_B^t B^{-1}$, esta condición es lo mismo que **factibilidad dual** :

$$A^t y \leq c.$$

Si además la solución básica $x_B = B^{-1} b$ es factible ($x_B \geq 0$), entonces es óptima! Es decir

$$x_B \geq 0$$

es la **condición de optimalidad dual** para y.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Sean x_B y y_B las soluciones asociadas a una base dada B. Tenemos entonces que:

- x_B es factible no óptima $(c_r < 0) \iff y_B$ es infactible pero satisface condición de optimalidad.
- x_B es infactible pero $c_r \geq 0 \iff y_B$ es factible pero no óptima.

IDEA: en el segundo caso, podemos iterar SIMPLEX en el dual para avanzar y_B hacia la optimalidad (x_B hacia la factibilidad).

¿Cómo cambiamos de base ? Si $x_{B(l)} < 0$, entonces la columna A_l sale de la base. Luego encontramos j que minimiza

$$\frac{c_{r(j)}}{(B^{-1}A_j)_l}$$

y entra a la base la columna A_j.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Sean x_B y y_B las soluciones asociadas a una base dada B. Tenemos entonces que:

- x_B es factible no óptima $(c_r < 0) \iff y_B$ es infactible pero satisface condición de optimalidad.
- x_B es infactible pero $c_r \geq 0 \iff y_B$ es factible pero no óptima.

IDEA: en el segundo caso, podemos iterar SIMPLEX en el dual para avanzar y_B hacia la optimalidad (x_B hacia la factibilidad).

¿Cómo cambiamos de base ? Si $x_{B(l)} < 0$, entonces la columna A_l sale de la base. Luego encontramos j que minimiza

$$\frac{c_{r(j)}}{(B^{-1}A_j)_l}$$

y entra a la base la columna A_j.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Sean x_B y y_B las soluciones asociadas a una base dada B. Tenemos entonces que:

- x_B es factible no óptima $(c_r < 0) \iff y_B$ es infactible pero satisface condición de optimalidad.
- x_B es infactible pero $c_r \geq 0 \iff y_B$ es factible pero no óptima.

IDEA: en el segundo caso, podemos iterar SIMPLEX en el dual para avanzar y_B hacia la optimalidad (x_B hacia la factibilidad).

¿Cómo cambiamos de base ? Si $x_{B(l)} < 0$, entonces la columna A_l sale de la base. Luego encontramos j que minimiza

$$\frac{c_{r(j)}}{(B^{-1}A_j)_l}$$

y entra a la base la columna A_j.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Sean x_B y y_B las soluciones asociadas a una base dada B. Tenemos entonces que:

- x_B es factible no óptima $(c_r < 0) \iff y_B$ es infactible pero satisface condición de optimalidad.
- x_B es infactible pero $c_r \geq 0 \iff y_B$ es factible pero no óptima.

IDEA: en el segundo caso, podemos iterar SIMPLEX en el dual para avanzar y_B hacia la optimalidad (x_B hacia la factibilidad).

¿Cómo cambiamos de base ? Si $x_{B(l)} < 0$, entonces la columna A_l sale de la base. Luego encontramos j que minimiza

$$\frac{c_{r(j)}}{(B^{-1}A_j)_l}$$

y entra a la base la columna A_j.

Algoritmo SIMPLEX DUAL

Sean x_B y y_B las soluciones asociadas a una base dada B. Tenemos entonces que:

- x_B es factible no óptima $(c_r < 0) \iff y_B$ es infactible pero satisface condición de optimalidad.
- x_B es infactible pero $c_r \geq 0 \iff y_B$ es factible pero no óptima.

IDEA: en el segundo caso, podemos iterar SIMPLEX en el dual para avanzar y_B hacia la optimalidad (x_B hacia la factibilidad).

¿Cómo cambiamos de base ? Si $x_{B(l)} < 0$, entonces la columna A_l sale de la base. Luego encontramos j que minimiza

$$\frac{c_{r(j)}}{(B^{-1}A_j)_l}$$

y entra a la base la columna A_j.

Primal VS Dual : Post-Optimalidad

$$\begin{array}{llcll} \text{Minimizar} & z = c^t x & \qquad & \text{Maximizar} & z = b^t y \\ \text{sujeto a} & Ax = b & & \text{sujeto a} & A^t y \leq c \\ & x \geq 0 & & & \end{array}$$

Sea x^* una solución óptima, entonces:

$$x_B^* = (B^*)^{-1} b \qquad \text{e} \qquad y^{*t} = c_B^t (B^*)^{-1}$$

luego

$$z^* = c_B^t x_B^* = c_B^t (B^*)^{-1} b = y^{*t} b$$

por lo tanto:

- x^* representa el cambio marginal en z en **función de los costos**
- y^* representa el cambio marginal en z en **función de los recursos**

Primal VS Dual : Post-Optimalidad

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^t x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = b^t y \\ \text{sujeto a} & A^t y \leq c \end{array}$$

Sea x^* una solución óptima, entonces:

$$x_B^* = (B^*)^{-1} b \qquad \text{e} \qquad y^{*t} = c_B^t (B^*)^{-1}$$

luego

$$z^* = c_B^t x_B^* = c_B^t (B^*)^{-1} b = y^{*t} b$$

por lo tanto:

- x^* representa el cambio marginal en z en **función de los costos**
- y^* representa el cambio marginal en z en **función de los recursos**

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

En otras palabras, si B^* es óptima, y cambiamos las restricciones de los recursos de b a $b + \Delta b$, la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δb sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δb ?

Resp: lo suficiente para que $x_B = (B^*)^{-1}(b + \Delta b)$ siga siendo factible:

$$(B^*)^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

En este caso, pueden cambiar ambos: la solución óptima y el valor óptimo

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

En otras palabras, si B^* es óptima, y cambiamos las restricciones de los recursos de b a $b + \Delta b$, la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δb sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δb ?

Resp: lo suficiente para que $x_B = (B^*)^{-1}(b + \Delta b)$ siga siendo factible:

$$(B^*)^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

En este caso, pueden cambiar ambos: la solución óptima y el valor óptimo

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

En otras palabras, si B^* es óptima, y cambiamos las restricciones de los recursos de b a $b + \Delta b$, la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δb sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δb ?

Resp: lo suficiente para que $x_B = (B^*)^{-1}(b + \Delta b)$ siga siendo factible:

$$(B^*)^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

En este caso, pueden cambiar ambos: la solución óptima y el valor óptimo

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

Si B^* es óptima, y cambiamos ahora los costos de c a $c + \Delta c$, entonces la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δc sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δc ?

Resp: lo suficiente para que se siga cumpliendo la condición de optimalidad:

$$c_r \geq 0$$

En este caso, solamente cambia el valor óptimo z^*, pero no la solución óptima x^*.

Suponga que se modifica c_k. En general hay dos casos:

- x_k es NO básica. Basta verificar $c_{r(k)} \geq 0$
- x_k es básica. Hay que verificar $c_{r(j)} \geq 0$ para todas las coordenadas no básicas.

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

Si B^* es óptima, y cambiamos ahora los costos de c a $c + \Delta c$, entonces la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δc sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δc ?

Resp: lo suficiente para que se siga cumpliendo la condición de optimalidad:

$$c_r \geq 0$$

En este caso, solamente cambia el valor óptimo z^*, pero no la solución óptima x^*.

Suponga que se modifica c_k. En general hay dos casos:

- x_k es NO básica. Basta verificar $c_{r(k)} \geq 0$
- x_k es básica. Hay que verificar $c_{r(j)} \geq 0$ para todas las coordenadas no básicas.

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

Si B^* es óptima, y cambiamos ahora los costos de c a $c + \Delta c$, entonces la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δc sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δc ?

Resp: lo suficiente para que se siga cumpliendo la condición de optimalidad:

$$c_r \geq 0$$

En este caso, solamente cambia el valor óptimo z^*, pero no la solución óptima x^*.

Suponga que se modifica c_k. En general hay dos casos:

- x_k es NO básica. Basta verificar $c_{r(k)} \geq 0$
- x_k es básica. Hay que verificar $c_{r(j)} \geq 0$ para todas las coordenadas no básicas.

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

Si B^* es óptima, y cambiamos ahora los costos de c a $c + \Delta c$, entonces la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δc sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δc ?

Resp: lo suficiente para que se siga cumpliendo la condición de optimalidad:

$$c_r \geq 0$$

En este caso, solamente cambia el valor óptimo z^*, pero no la solución óptima x^*.

Suponga que se modifica c_k. En general hay dos casos:

- x_k es NO básica. Basta verificar $c_{r(k)} \geq 0$
- x_k es básica. Hay que verificar $c_{r(j)} \geq 0$ para todas las coordenadas no básicas.

Análisis Post-Óptimal: Rango de aplicabilidad

Si B^* es óptima, y cambiamos ahora los costos de c a $c + \Delta c$, entonces la base B^* seguirá siendo óptima mientras Δc sea pequeño.

¿ que tan pequeño tiene que ser Δc ?

Resp: lo suficiente para que se siga cumpliendo la condición de optimalidad:

$$c_r \geq 0$$

En este caso, solamente cambia el valor óptimo z^*, pero no la solución óptima x^*.

Suponga que se modifica c_k. En general hay dos casos:

- x_k es NO básica. Basta verificar $c_{r(k)} \geq 0$
- x_k es básica. Hay que verificar $c_{r(j)} \geq 0$ para todas las coordenadas no básicas.

Primal VS Dual: Interpretación

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^t x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = b^t y \\ \text{sujeto a} & A^t y \leq c \end{array}$$

Interpretación económica:

- x^* son las cantidades a producir que minimizan los costos, utilizando una cantidad dada de recursos.
- y^* son los precios de venta de los recursos que maximizan el beneficio, sin sobrepasar un costo dado de producción de los mismos.

Primal VS Dual: Interpretación

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^t x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = b^t y \\ \text{sujeto a} & A^t y \leq c \end{array}$$

Interpretación económica:

- x^* son las cantidades a producir que minimizan los costos, utilizando una cantidad dada de recursos.
- y^* son los precios de venta de los recursos que maximizan el beneficio, sin sobrepasar un costo dado de producción de los mismos.

Ejemplo: Post-optimalidad

Una fábrica produce 4 tipos de ladrillos ($j = 1, 2, 3, 4$). El proceso de fabricación posee 3 etapas ($i = 1, 2, 3$). Dentro del próximo mes se dispone de 800 horas-máquina para etapa 1, 1000 para etapa 2, y 340 para etapa 3. Para maximizar utilidades se planteó el modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } z \quad = \quad & 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4 \\
\text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 \leq 800 \\
& 1,5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1000 \\
& 0,5x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 340 \\
& x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

x_i = cantidad a fabricar de ladrillo tipo i.

Ejemplo: Post-optimalidad

¿Qué precio estaría dispuesto a pagar/cobrar por una hora-máquina para la etapa 2?

Resp: Resolvemos el Dual:

$$y_2^* = 2 \text{ (beneficio adicional por la hora-máquina adicional)}$$

Estaría dispuesto a pagar cualquier precio inferior a 2, y las vendería a cualquier precio superior a 2.

¿Hasta cuántas horas adicionales estaría dispuesto a comprar / vender ?

Ejemplo: Post-optimalidad

¿Qué precio estaría dispuesto a pagar/cobrar por una hora-máquina para la etapa 2?

Resp: Resolvemos el Dual:

$$y_2^* = 2 \text{ (beneficio adicional por la hora-máquina adicional)}$$

Estaría dispuesto a pagar cualquier precio inferior a 2, y las vendería a cualquier precio superior a 2.

¿Hasta cuántas horas adicionales estaría dispuesto a comprar / vender ?

Ejemplo: Post-optimalidad

¿Qué precio estaría dispuesto a pagar/cobrar por una hora-máquina para la etapa 2?

Resp: Resolvemos el Dual:

$$y_2^* = 2 \text{ (beneficio adicional por la hora-máquina adicional)}$$

Estaría dispuesto a pagar cualquier precio inferior a 2, y las vendería a cualquier precio superior a 2.

¿Hasta cuántas horas adicionales estaría dispuesto a comprar / vender ?

Ejemplo: Post-optimalidad

¿Qué precio estaría dispuesto a pagar/cobrar por una hora-máquina para la etapa 2?

Resp: Resolvemos el Dual:

$$y_2^* = 2 \text{ (beneficio adicional por la hora-máquina adicional)}$$

Estaría dispuesto a pagar cualquier precio inferior a 2, y las vendería a cualquier precio superior a 2.

¿Hasta cuántas horas adicionales estaría dispuesto a comprar / vender ?

Ejemplo: Post-optimalidad

El análisis se aplica mientras la base B^* siga siendo óptima, lo que será el caso mientras la solución básica x_{B^*} siga siendo factible:

$$x_{B^*} = (B^*)^{-1} b \geq 0.$$

(Los costos reducidos no se ven afectados).

Por ejemplo, si queremos vender 100 horas para etapa 2 (b_2 cambia a 900) :

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix}$$

vemos que la solución básica asociada a B^* sigue siendo factible, y por lo tanto está dentro del régimen del análisis post-optimal.

Ejemplo: Post-optimalidad

El análisis se aplica mientras la base B^* siga siendo óptima, lo que será el caso mientras la solución básica x_{B^*} siga siendo factible:

$$x_{B^*} = (B^*)^{-1} b \geq 0.$$

(Los costos reducidos no se ven afectados).

Por ejemplo, si queremos vender 100 horas para etapa 2 (b_2 cambia a 900) :

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix}$$

vemos que la solución básica asociada a B^* sigue siendo factible, y por lo tanto está dentro del régimen del análisis post-optimal.

Ejemplo: Post-optimalidad

El análisis se aplica mientras la base B^* siga siendo óptima, lo que será el caso mientras la solución básica x_{B^*} siga siendo factible:

$$x_{B^*} = (B^*)^{-1} b \geq 0.$$

(Los costos reducidos no se ven afectados).

Por ejemplo, si queremos vender 100 horas para etapa 2 (b_2 cambia a 900) :

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix}$$

vemos que la solución básica asociada a B^* sigue siendo factible, y por lo tanto está dentro del régimen del análisis post-optimal.

Ejemplo: Post-optimalidad

Suponga que c_3 cambia a 40. ¿Cambia la solición óptima ?

x_3 es NO básica, por lo tanto basta checkear

$$c_{r(3)} = -40 - (-14, -9, 0) \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

Por lo tanto, la solución no cambia (aunque el valor óptimo de z sí).

Ejemplo: Post-optimalidad

Suponga que c_3 cambia a 40. ¿Cambia la solición óptima ?

x_3 es NO básica, por lo tanto basta checkear

$$c_{r(3)} = -40 - (-14, -9, 0) \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

Por lo tanto, la solución no cambia (aunque el valor óptimo de z sí).

Ejemplo: Post-optimalidad

Suponga que c_3 cambia a 40. ¿Cambia la solición óptima ?

x_3 es NO básica, por lo tanto basta checkear

$$c_{r(3)} = -40 - (-14, -9, 0) \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

Por lo tanto, la solución no cambia (aunque el valor óptimo de z sí).